INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE
L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES
STATISTICIENS ECONOMISTES

OPTION MATHEMATIQUES

Juin 1998

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée: 4 heures)
5 pages

Dans tout le problème on considère des polynômes et des séries entières à coefficients réels. On identifie le polynôme et la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui lui est associée.

On dira que le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ou la fonction développable en série entière au voisinage de zéro $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ sont **positifs** si les coefficients a_i sont tous supérieurs ou égaux à zéro et non tous nuls.

On dira que le polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ou la fonction $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ sont **à valeurs positives** si pour tout x réel, $P(x) \geq 0$ ou $f(x) \geq 0$ lorsque la fonction f est définie.

Nous dirons qu'un polynôme est de coefficient dominant égal à 1 si le coefficient de son monôme de plus haut degré est égal à 1

I. Introduction

1. Déterminer parmi les polynômes suivants ceux qui sont positifs et ceux qui sont à valeurs positives : X^2+X+1, X^2-X+1 et $X^2+2X+\frac{1}{2}$.

2. Montrer que la fonction $\frac{\sum_{i=0}^{s} b_i x^i}{1-x}$ est positive si et seulement si toutes les sommes partielles $\sum_{i=0}^{k} b_i$, pour k variant de 0 à s, sont positives et que l'une d'entre elles est non-nulle.

II. Quelques résultats préliminaires

Seule la dernière question de cette partie sera utile pour la suite du problème. Il est donc possible de passer directement à la partie III en admettant le résultat du II 4. c).

1. Soit C un polynôme de la forme $C(x) = x^2 + c_1 x + c_2$ n'ayant pas de racines réelles. Soit m un entier et soient u_1 et u_2 les racines de C, u_1 étant celle dont la partie imaginaire est positive. On notera φ l'argument de u_1.

a) Montrer que le polynôme défini par $D_m(x) = (x^{m+1}-u_1^{m+1})(x^{m+1}-u_2^{m+1})$ est à coefficients réels. A quelle condition sur m et φ est-il positif?

b) Montrer qu'il existe un polynôme B_m tel que $B_m C = D_m$. Calculer B_m.

c) A quelle condition sur m et φ le polynôme B_m est-il positif?

d) En déduire qu'il existe deux polynômes positifs B et D tels que $BC = D$.

2. Soit à présent C un polynôme de la forme $C(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$ avec $c_m > 0$, n'ayant pas de racines réelles strictement positives. Montrer qu'il existe deux polynômes positifs B et D tels que $BC = D$.

3. Soit B un polynôme de la forme $B(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ avec $b_0 = 1$ dont toutes les racines, notées $\alpha_1, ..., \alpha_m$, sont réelles et strictement plus grandes que 1 (les racines multiples apparaissent dans cette liste autant de fois que leur ordre de multiplicité).

a) Montrer qu'il existe un polynôme positif P_N tel que, pour tout x réel, $P_N B(x) = H(x^N)$ où H est un polynôme ayant exactement pour racines $\alpha_1^N, ..., \alpha_m^N$ et où N est un entier donné.

b) En déduire qu'il existe un polynôme positif P tel que la fonction $\frac{P(x)B(x)}{1-x}$ soit positive.

4. Soit à présent A un polynôme tel que $A(1) > 0$. Soient $\phi_1, ..., \phi_m$, celles des racines de A qui sont contenues dans l'intervalle $[0, 1[$ et $\beta_1, ..., \beta_n$ celles contenues dans l'intervalle $]1, +\infty[$ (les racines multiples apparaissent dans cette liste autant de fois que leur ordre de multiplicité). Notons F le polynôme défini par $F(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \phi_i)$ et notons B le polynôme défini par $B(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(x-\beta_i)}{1-\beta_i}$. Notons enfin C le polynôme tel que $A = CFB$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme positif Q de coefficient dominant égal à 1 tel que le polynôme CQ soit positif

b) Montrer qu'il existe un polynôme positif P de coefficient dominant égal à 1 tel que $\frac{B(x)P(x)}{1-x}$ soit positive.

c) En déduire qu'il existe un polynôme positif H de coefficient dominant égal à 1 et G un polynôme vérifiant $G(1) > 0$ et $\frac{G(x)}{1-x}$ positive tels que l'on ait $AH = FG$.

III. Premières évaluations

Soit à présent, dans toute cette partie, $A(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$ un polynôme de degré r et soit n un entier supérieur ou égal à r fixé. A tout polynôme U de degré d au plus égal à $n - r$ tel que $U(x) = \sum_{i=0}^{d} u_i x^i$, on associe la suite définie par

$$s_0 = 1 + a_0 u_0$$

et, pour $m \geq 1$,

$$s_m = s_{m-1} + \sum_{i=0}^{m} a_i u_{m-i}$$

où, par convention, $a_i = 0$ pour $i > r$ et $u_i = 0$ pour $i > d$.

1. Montrer que, en posant, pour tout x réel, $S(x) = \sum_{m=0}^{n-1} s_m x^m$, on a

$$1 + A(x)\,U(x) = S(x)\,(1 - x) + s_n x^n.$$

2. On dit qu'un polynôme U de degré d au plus égal à $n - r$ est financé si U est positif et si le polynôme $\tilde{S}$ défini par

$$\tilde{S}(x) = \sum_{i=0}^{n} s_i x^i$$

est positif. On pose alors

$$\Phi_n(U) = s_n$$

et on note V_n la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, si elle existe, de Φ_n sur tous les polynômes U financés et de degré $n - r$. Montrer que si $A(1) \leq 0$ alors V_n existe et est égal à 1 pour tout n.

3. Déduire également que si σ est une racine dans $]0,1[$ de A alors $V_n \leq \frac{1}{\sigma^n}$.

4. Supposons, à présent, que le polynôme A n'admet pas de racine dans l'intervalle $]0,1[$ et que l'on a $A(1) > 0$.

a) Montrer qu'il existe un entier m, deux polynômes positifs H et G, G étant de degré au plus $m-1$, et un réel g_m strictement positif tels que, pour tout réel x,

$$A(x) H(x) = (1-x) G(x) + g_m x^m$$

(on pourra utiliser le II 4. c)).

b) Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout x réel, on a

$$(1+\lambda g_m) x^m + (1-x)\left(\left(1+x+...+x^{m-1}\right) + \lambda G(x)\right) = 1 + \lambda A(x) H(x)$$

et en déduire que $V_m = +\infty$.

IV. Suites à un seul changement de signe

Supposons à présent que l'on a $A(0) < 0$ et $A(1) > 0$ et qu'il existe $k \leq r$ tel que $a_i \leq 0$ pour $i \leq k$ et $a_i \geq 0$ pour $i > k$.

1. Montrer que le polynôme A a exactement une et une seule racine réelle positive et que cette dernière est dans l'intervalle $]0,1[$. Nous noterons θ cette dernière.

2. En notant B le polynôme tel que $A(x) = (x-\theta) B(x)$, montrer que B est un polynôme positif (on montrera, pour $i \leq k$ et par récurrence, que $b_i \geq 0$ et pour $i \geq k$, que si $b_{i+1} < 0$, alors il y a une contradiction).

3. Montrer qu'il existe un polynôme positif C de degré $r-2$ tel que $B(x) = (1-x) C(x) + B(1) x^{r-1}$.

4. Soit D le polynôme tel que $B(x) - B(1) = (x-1) D(x)$. Montrer que D est positif.

5. En notant V_n le polynôme défini par $V_n(x) = x^{n-1} + \theta x^{n-2} + ... + \theta^{n-2} x + \theta^{n-1}$, vérifier que l'on a pour tout $n \geq r$,

$$\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-r+1} \left((1-x) C(x) + B(1) x^{r-1}\right) + (B(1) - B(x)) = B(1) + A(x) \frac{V_{n-r+1}(x)}{\theta^{n-r+1}}$$

6. En déduire qu'il existe deux polynômes positifs S et U tels que

$$\frac{x^n}{\theta^{n-r+1}} + (1-x) S(x) = 1 + A(x) U(x), \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

7. En déduire que pour tout $n \geq r$, $\frac{1}{\theta^{n-r+1}} \leq V_n \leq \frac{1}{\theta^n}$